有地形情况下正压大气初值问题解的唯一性和稳定性

黄建平
（中国科学院兰州高原大气物理研究所）

一、引　　言

近年来，随着数值天气预报的蓬勃发展，愈来愈多的模式考虑地形影响，对模式的要求也越来越高。因此对模式性质的进一步研究是很有必要的。

过去对于初值问题的适定性已有过不少研究[1]，但很少考虑大地形对初值问题的影响。基于上述原因，本文采用与文献〔1〕完全相同的方法，证明了有地形情况下正压大气初值问题解的唯一性和稳定性。与文献〔1〕不同的是积分区域取为纬度带而不是球面，这样与通常使用的有限区域模式更为接近。有地形情况下斜压大气初值问题解的唯一性和稳定性可以用同样的方法得到证明。

二、解的唯一性和稳定性的证明

采用一个常用的考虑大地形作用的正压模式。按文献〔2—4〕，控制方程可写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+J(\psi,\ \nabla^2\psi+f+Ah)=0 \tag{1}$$

其中ψ为平均位面上的地转流函数，A为一常数，h为地形高度。其余符号同惯常意义。

$$J(A,\ B)=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x} \tag{2}$$

初条件为

$$\lim_{t\to 0}\nabla^2\psi(x,\ y,\ t)=\nabla^2\psi(x,\ y,\ 0) \tag{3}$$

根据文献〔1〕，称满足（1）式以及初条件（3）式的函数$\psi(x,y,t)$为初值问题（1）—（3）式的解。

设初值问题的解$\psi(x,y,t)$为光滑解，即要求解在积分区域上有三阶连续偏导和连

1984年11月24日收到此稿。

续的$\frac{\partial \psi}{\partial t}$。

对于光滑解，显然有$\nabla^2\psi \in L^2$；其中L^2为有限区域上平方可积函数组成的函数空间。为证明唯一性，根据Sundström[5]的方法，设有两解ψ_2和ψ_1，令

$$\psi_2 - \psi_1 = \psi' \tag{4}$$

由（1）式和（3）式，就有

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi' + J(\psi', \nabla^2\psi_1 + f + Ah) + J(\psi_2, \nabla^2\psi') = 0 \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0} \nabla^2\psi'(x, y, t) = 0 \tag{6}$$

引入函数$\Psi(x, y, t)$，并设

$$\psi'(x, y, t) = e^{\gamma t}\Psi(x, y, t) \tag{7}$$

其中$\gamma > 0$为待定实数，从而有

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi' = e^{\gamma t}\left(\gamma\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) \tag{8}$$

（5）式和（6）式即可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi + J(\Psi, \nabla^2\psi_1 + f + Ah) + J(\psi_2, \nabla^2\Psi) + \gamma\nabla^2\Psi = 0 \tag{9}$$

$$\lim_{t\to 0} \|\nabla^2\Psi(x, y, t)\| \to 0 \tag{10}$$

在一定的条件下[6]，对所有的$t \in [0, \infty]$都有

$$\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2\Psi(x, y, t)\right\|^2 = 2\iint_S \nabla^2\Psi \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi dS$$

用$\nabla^2\Psi$乘以（9）式，并沿某个纬度带积分，纬度带的宽为2W，长为L，南北边界采用刚体边界，即$y = \pm W$，$\psi_1(x, y, t) = \psi_2(x, y, t) = \Psi(x, y, t) \equiv 0$，从而有

$$\frac{d}{dt}\left\|\nabla^2\Psi\right\|^2 = -2\int_{-W}^{W}\int_0^L \nabla^2\Psi(J(\Psi, \nabla^2\psi_1 + f + Ah) + J(\psi_2, \nabla^2\Psi) + \gamma\nabla^2\Psi)dxdy \tag{11}$$

其中 $\int_{-W}^{W}\int_0^L \nabla^2\Psi J(\psi_2, \nabla^2\Psi)dxdy$

$$= \int_{-W}^{W}\int_0^L \nabla^2\Psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\Psi - \frac{\partial}{\partial y}\psi_2 \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\Psi\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-W}^{W}\int_0^L \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2\Psi\right)^2 \cdot \psi_2\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2\Psi\right)^2 \cdot \psi_2\right]\right\}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{-W}^{W}\left(\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2\Psi)^2\psi_2\right)\Big|_0^L dy - \int_0^L\left(\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\Psi)^2\psi_2\right)\Big|_{-W}^{W} dx = 0\right.$$

$$\int_{-W}^{W}\int_0^L \nabla^2\Psi \cdot J(\Psi, \nabla^2\psi_1 + f + Ah)$$

$$=\int_{-W}^{W}\int_{0}^{L}\nabla^2\Psi\cdot J(\Psi,\nabla^2\psi_1)dxdy+\int_{-W}^{W}\int_{0}^{L}\nabla^2\Psi\cdot J(\Psi,\ f+Ah)dxdy$$

$$=\int_{-W}^{W}\int_{0}^{L}\nabla^2\Psi\cdot J(\Psi,\ f+Ah)dxdy$$

则（11）式可简化为

$$\frac{d}{dt}\|\nabla^2\Psi\|^2=-2\int_{-W}^{W}\int_{0}^{L}\nabla^2\Psi\cdot J(\Psi,\ f+Ah)dxdy-2\gamma\|\nabla^2\Psi\|^2 \tag{12}$$

（12）式两边对t积分，就有

$$\|\nabla^2\Psi(x,\ y,\ t)\|^2-\|\nabla^2\Psi(x,\ y,\ 0)\|^2$$
$$=-2\gamma\int_0^t\|\nabla^2\Psi(x,y,t)\|^2dt-2\int_0^t\int_{-W}^{W}\int_0^L\nabla^2\Psi\cdot J(\Psi,f+Ah)dxdy \tag{13}$$

如果设 $h=h_0e^{-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}}$，其中 r_0 为表征地形水平尺度特点的参数，并且不考虑 f 的变化，则有

$$J(\Psi,\ f+Ah)=\frac{2Ah_0}{r_0^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}x-\frac{\partial\Psi}{\partial x}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}}$$

$$\int_{-W}^{W}\int_0^L\nabla^2\Psi\cdot J(\Psi,\ f+Ah)dxdy$$

$$=\frac{2Ah_0}{r_0^2}\int_{-W}^{W}\int_0^L\nabla^2\Psi\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}x-\frac{\partial\Psi}{\partial x}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}}dxdy$$

利用格林公式和积分中值定理不难证明上述积分为有限量，即

$$\left|\int_{-W}^{W}\int_0^L\nabla^2\Psi\cdot J(\Psi,f+Ah)dxdy\right|<M \tag{14}$$

又由（10）式 $\|\nabla^2\Psi(x,y,0)\|^2=0$，因此，对于任何给定的 t^*，在区间 $t\in[0,\ t^*]$ 内，总可以找到足够大的 γ，使

$$+\gamma\int_0^t\|\nabla^2\Psi(x,\ y,\ t)\|^2dt+M\geqslant 0$$

即使（13）式右端 $\leqslant 0$，其中当 $\Psi=0$ 时等号成立。于是有

$$\|\nabla^2\Psi(x,\ y,\ t)\|^2\leqslant 0$$

从而有 $\|\nabla^2\Psi(x,y,\ t)\|^2=0$，由此推出 $\nabla\Psi(x,\ y,\ t)=0$，亦即 $\nabla\psi'=0$，$\nabla\psi_2=\nabla\psi_1$。解的唯一性得到证明。

为证明解对初值误差的稳定性，设：

$$\lim_{t\to 0}\|\nabla^2\Psi(x,\ y,\ t)\|^2\leqslant\varepsilon^2$$

而$\psi_2-\psi_1$为具有不同初值的解之差，采用上面同样的方法，得到

$$\frac{d}{dt}\|\nabla^2\Psi\|^2=-2[\gamma\|\nabla^2\Psi\|^2+\int_{-W}^{W}\int_{0}^{L}\nabla^2\Psi\cdot J(\Psi,f+Ah)dxdy] \tag{15}$$

用与〔1〕完全相同的方法有

$$\|\nabla^2\Psi(x,y,t)\|^2\leqslant\|\nabla^2\Psi(x,y,0)\|^2e^{-\gamma''t}$$

$$\|\nabla^2\psi'\|^2\leqslant\varepsilon^2e^{(\gamma+\gamma')t}\qquad(0\leqslant t\leqslant t^*) \tag{16}$$

其中γ，γ'，γ''为大于零的实数，且$\gamma-\gamma'=\gamma''$。由（16）式可以看出解的连续性依赖于初值函数。即证明了解的稳定性。

兰州大学数学系余庆余老师对本工作提出了宝贵意见，在此表示衷心感谢！

参 考 文 献

〔1〕曾庆存，数值天气预报的数学物理基础，科学出版社，1979。

〔2〕Charhey, J·G·and A·Eliassen, Tellus, **1**, 38—54, 1949。

〔3〕Kawata, Y·, J·Met·Soc.Jap., **35**, 174—183, 1957。

〔4〕伍荣生，气象学报，**40**，129—137，1982。

〔5〕Sundström, A., Stability theorem for the barotropic vorticity equation, Mon. Wea. Rev., **97**, 340—345, 1969。

〔6〕复旦大学数学系主编，实变函数论与泛函分析，高等教育出版社，1979。