第5卷　第4期　　高原气象　PLATEAU METEOROLOGY　　Vol.5 No.4

非线性正压Rossby波及其稳定性

黄建平
（中国科学院兰州高原大气物理研究所）

提　　要

本文应用常微分方程的稳定性理论和几何理论，从非线性正压涡度方程出发，讨论了一类非线性正压Rossby波的存在性和稳定性。结果表明：对于无耗散系统Rossby波的存在和稳定要求基本气流绝对涡度的经向梯度与波速、基本气流之差为反号，即：$\left(\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}\right)\Big/(k^2+l^2)(c-\overline{u})<0$ 且 $V=0$ 时初始涡度不为零。最后给出两种情况下波的解析解表达式。

一、引　　言

最近几十年来，非线性波动的研究愈来愈引起了人们的重视，并取得了一些有意义的结果〔1—2〕。在大气科学方面，最早重视这方面工作的是Long〔3〕和Benney〔4〕。他们研究的是具有水平切变的正压Rossby波，认为其振幅满足Kdv方程。在国内刘式达、刘式适〔5—6〕从非线性大气运动方程组出发，探讨了解非线性方程的途径。他们将非线性项在平衡点附近作Taylor展开，求得了非线性有限振幅的惯性重力波和Rossby波的解析解。黄思训等〔7〕,1)作了进一步的工作，他们从无辐散正压大气方程组出发，导出了不考虑 $v\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $v\frac{\partial v}{\partial y}$ 项的正压涡度方程，由此，他们首先把波的存在性化为非线性常微分方程组是否存在周期解的问题，然后再从常微分方程的定性理论出发，指出在相平面上存在闭合的相轨线是非线性Rossby波的存在条件，并且得到了非线性Rossby波的解析解的表达式。

受文献〔7〕的启发，我们对文献〔6〕中用来讨论Rossby波的方程进行了分析，首先分析了这类方程所描写Rossby波的存在性，进而讨论了扰动对波的稳定性影响，并得到了这类非线性Rossby波的稳定性判据。

1986年1月6日收到，4月2日收到第一次修改稿，5月20日收到第二次修改稿。

1）张铭、黄思训，非线性螺旋行星波的非频散解，1985年大气环流会议材料。

二、基 本 方 程

取一般情况下的正压无辐散大气中的涡度方程和连续性方程为

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\beta v=0 & (1)\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 & (2)\end{cases}$$

令

$$u=\overline{u}(y)+U(\theta),\quad v=V(\theta),\quad \theta=kx+ly-\sigma t \qquad (3)$$

其中k、l分别表示x、y方向上的波数，$\overline{u}(y)$为随纬度变化的基本西风。

将（3）式代入（1）、（2）式得

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\overline{u}+U)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\left(\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}\right)V=0 & (4)\\ kU'+lV'=0 & (5)\end{cases}$$

其中“′”表示对θ的微商。

为了使问题简化，类似文献〔5，6〕中的处理，我们在上面推导中略去了$V\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)$项，这相当于略去了经向扰动速度产生的非线性作用，与文献〔5〕不同的是我们考虑了基本气流的经向变化。

对（5）式进行积分（取积分常数为0）得到

$$U=-\frac{l}{k}V \qquad (6)$$

把（6）式代入（4）式整理后得到关于V的二阶非线性常微分方程。

$$(\eta+V)V''-\xi V=0 \qquad (7)$$

其中

$$\begin{cases}b=\frac{k^2+l^2}{k}l\\ \eta=\frac{\sigma-k\overline{u}}{l}=\frac{k}{l}(c-\overline{u})\\ \xi=\left(\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}\right)\Big/b\end{cases} \qquad (8)$$

其中ξ与基本气流绝对涡度的经向梯度成正比，η与Rossby波速与基本气流之差成正比。

从上面的推导可以看出，非线性Rossby波的解即归结于求（7）式的周期解[8]。

三、非线性正压Rossby波的存在性

下面我们讨论（1）～（2）式描写的一类正压Rossby波的存在性问题。

将（7）式化为一阶常微分方程组，令$V'=W$，则有

$$\begin{cases} V'=W & (9) \\ W'=\dfrac{\xi V}{(\eta+V)} & (10) \end{cases}$$

这是一个二维单自由度自治系统，平衡点为[8]$(V, W)=(0, 0)$。

$$\frac{dW}{dV}=\frac{\xi V}{\eta+V}\times\frac{1}{W} \tag{11}$$

积分（11）式得

$$\frac{W^2}{2}=A+\xi V-\xi\eta\ln|\eta+V| \tag{12}$$

其中A为积分常数。令

$$f(V)=A+\xi V-\xi\eta\ln|\eta+V| \tag{13}$$

类似文献〔7〕，1）中的作法，下面对各种不同的情况讨论平衡点周围相轨线的性质。

要在平衡点（0，0）周围有闭合的相轨线就一定要保证$V=0$时，$f(V)>0$，即要求

$$A>\xi\eta\ln|\eta| \tag{14}$$

同时对ξ，η的符号要有一定的限制。设

$$\begin{cases} f_1(V)=A+\xi V & (15) \\ f_2(V)=\xi\eta\ln|\eta+V| & (16) \end{cases}$$

$$f(V)=f_1(V)-f_2(V) \tag{16}$$

由（13）式可知，要使$f(V)$在（0，0）点有定义，且$f_1(V)$和$f_2(V)$有两个交点，只有当$\eta>0$且$\eta+V>0$和$\eta<0$，$\eta+V<0$时才有可能出现。下面就这两种情况进行讨论。

Ⅰ、$\eta>0$，$\eta+V>0$

由图1不难看出，对于这种情况在$V_1<V<V_2$范围内要使$f(V)>0$，只有当$\xi<0$时才会出现。若$\xi>0$，$\eta>0$，$f_1(V)$和$f_2(V)$不会有两个交点。

Ⅱ、$\eta<0$，$\eta+V<0$

对于这种情况(见图2)，在$V_1<V<V_2$范围内要使$f(V)>0$，只有$\xi>0$，$\eta<0$。

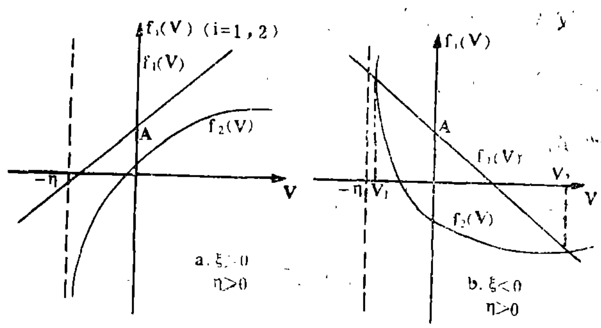

图1　$\eta>0$，$\eta+V>0$

Fig.1　$\eta>0$，$\eta+V>0$

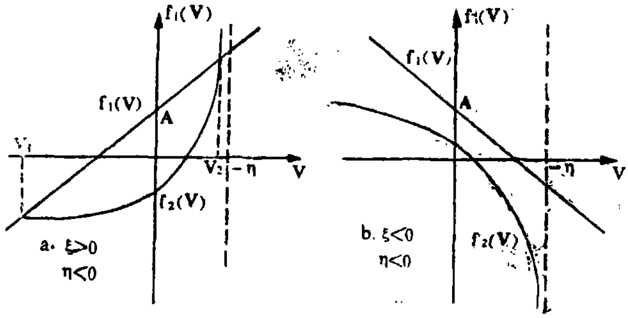

图 2 $\eta<0$，$\eta+V<0$

Fig. 2 $\eta<0$，$\eta+V<0$

下面在W，V相平面上作出相轨线。先讨论$\xi<0$，$\eta>0$的情形。由于（12）式在相平面上关于W是对称的，故只须考虑第Ⅰ，第Ⅱ象限的情况。设$V_1\leqslant V\leqslant V_2$，此时$\eta+V>0$。

对于第Ⅰ象限，$W>0$，$\eta+V>0$，故$V'>0$，$W'<0$，即V从0增加到V_2时，W从$\sqrt{2F(0)}$减少到0；对于第Ⅱ象限，$W>0$，$\eta+V>0$，故$V'>0$，$W'>0$，V从V_1减少到0，W从0增加到$\sqrt{2F(0)}$，又根据W的对称性，我们得到在$V_1\leqslant V\leqslant V_2$情况下，相轨线是闭合的（见图3）。当$\xi>0$，$\eta<0$时，平衡点周围的相轨线是闭合的，走向和上述情况一致，只是V_1和V_2的取值不同。

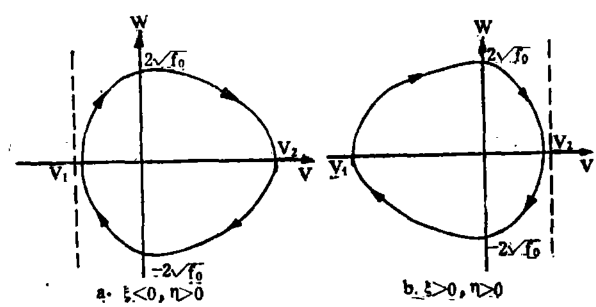

图 3

注：b中$\eta<0$

由此可知，只有当ξ和η反号时，且A满足（14）式时才可有周期解存在。

下面来说明积分常数A的物理意义。首先记

$$\zeta_0=\zeta|_{V=0}=kV_0'-lU_0'=\frac{k^2+l^2}{k}V_0'$$

ζ_0即为$V=0$时的扰动涡度。

由于 $\frac{V'^2}{2}|_{V=0}=A-\xi\eta\ln|\eta|$，故有

$$|\zeta_0|=\frac{k^2+l^2}{k}\sqrt{2(A-\xi\eta\ln|\eta|)}$$

$$=\frac{k^2+l^2}{k}\sqrt{2F(0)} \tag{17}$$

由于$A>\xi\eta\ln|\eta|$，由此推出ζ_0…会产生周期解。

综上所述，当基本气流绝对涡度的经向梯度与Rossby波速和基本气流速度之差为反号，且$V=0$时的扰动涡度不为零时，扰动可产生Rossby波解，反之则不会出现Rossby波。也就是说，若初始扰动速度在相轨线以内区域时，扰动将围绕原点沿卵形闭轨线作周期运动，如果扰动速度位于相轨线外，则扰动将发生不稳定，此时不会有波解存在。

为了讨论波的稳定性以及求解方便，按照文献〔5〕的作法，当$\left|\frac{V}{\eta}\right|<1$时，对(10)式，(12)式进行Taylor展开。但展开时必须对积分常数加上更严一些的限制，要求A满足

$$\xi\eta\ln|\eta|<A<\xi\eta\ln|\eta|-\xi\eta\ln(1-\ln 2) \tag{18}$$

即ζ_0须满足如下不等式

$$0<\zeta_0^2<-2\left(\frac{k^2+l^2}{l}\right)\xi\eta(1-\ln 2) \tag{19}$$

将(10)式在平衡点附近作Taylor展开，得

$$\begin{cases} V'=W & (20) \\ W'=\frac{\xi}{\eta}V\left[1-\left(\frac{V}{\eta}\right)+\left(\frac{V}{\eta}\right)^2-\left(\frac{V}{\eta}\right)^3+\cdots\cdots\right] & (21) \end{cases}$$

对(21)式取一次项，就是我们讨论线性正压Rossby波的基本方程。(21)式取到二次项，就是我们讨论非线性有限振幅Rossby波的基本方程。

四、非线性正压Rossby波的稳定性

考虑到非线性项作用，(21)式取到二次项，就有

$$\begin{cases} V'=W & (22) \\ W'=\frac{\xi}{\eta}V\left[1-\frac{V}{\eta}\right] & (23) \end{cases}$$

常微分方程组(22)～(23)类似于力学中单个自由度的自由振动微分方程组[8]。对于方程组本身有两个平衡点O点$(V、W)=(0，0)$；C点$(V，W)=(\eta，0)$。从前面的讨论可知，C点$(V，W)=(\eta，0)$不会产生Rossby波解(见图3)，此时在C点附近叠加一个小扰动，无论ξ，η的取值如何它总是不稳定的。如果方程(21)取的阶数越高，使W'为0的点越多，但是可以证明这些点都在波解的存在域以外，在它们周围不会有Rossby波产生，扰动总是不稳定的。所以，讨论波解的稳定性问题就转化为平衡点O点的稳定性问题。从物理上看，O点的稳定性表示平衡状态叠加了小扰动偏离平衡状态后，相点是否永远在平衡态附近运动。下面根据常微分方程的稳定性理论[8]讨论平衡点的稳定性。

按Poincar-Bendixson理论[8]，(23)式在平衡点O附近线性和非线性的定性特点是一致的。我们用其一次近似方程组判别其稳定性。

把(22)和(23)式化为一阶自治系统的常微分方程组

$$\begin{cases} V' = W & (24) \\ W' = \dfrac{\xi}{\eta} V & (25) \end{cases}$$

在平衡点O的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ \dfrac{\xi}{\eta} & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (26)$$

展开后，得

$$\lambda^2 = \frac{\xi}{\eta} \qquad (27)$$

由上式可以判断（25）式O点的稳定性。

1. $\dfrac{\xi}{\eta} < 0$

此时，$\lambda = \pm i\sqrt{\left|\dfrac{\xi}{\eta}\right|}$ 为一对共轭纯虚根，O点是稳定的。

2. $\dfrac{\xi}{\eta} > 0$

此时，$\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}}$ 为两实根，且有一实根为正，则O点是不稳定的。

这个结论和我们前面讨论Rossby波存在性时所得结论是一致的，即要求$\xi\eta < 0$（或$\xi/\eta < 0$），且A满足(14)式时才有波解存在，并且扰动所产生的波是稳定的。

3. $\dfrac{\xi}{\eta} = 0$

此时方程组可直接化为

$$\begin{cases} V' = W \\ W' = 0 \end{cases}$$

从而有$V = C_1\theta + C_2$，其中C_1和C_2为积分常数，显然当$t\to\infty$，$V\to\infty$，O点是不稳定的。由（8）式，要使$\dfrac{\xi}{\eta} = 0$，只有$\beta - \dfrac{d^2\overline{u}}{dy^2} = 0$。也就是说当$\beta - \dfrac{d^2\overline{u}}{dy^2} = 0$时，平衡点O点是不稳定的，这个结论就是众所周知的线性正压不稳定判据。当$\beta - \dfrac{d^2\overline{u}}{dy^2} = 0$在线性和非线性情况下扰动都是不稳定的。

从以上的讨论还可以看出，当线性正压稳定时，由于非线性项作用，扰动也可出现不稳定。在实际大气中，造成$\beta - \dfrac{d^2\overline{u}}{dy^2} = 0$的情况是不多的，更多的情况是由于非线性作用造成的不稳定。

五、非线性正压Rossby波的解

按照〔5、6〕中的作法，讨论（4）～（5）式描写的一类Rossby波的解析解，将(12)式改写为

$$\frac{W^2}{2}=A-\xi\eta\ln|\eta|+\xi V-\ln\left|1+\frac{V}{\eta}\right| \tag{28}$$

当$\left|\frac{V}{\eta}\right|<1$，且A满足(14)式时，将$\ln\left|1+\frac{V}{\eta}\right|$进行Taylor展开

$$\ln\left|1+\frac{V}{\eta}\right|=\frac{V}{\eta}-\frac{1}{2}\left(\frac{V}{\eta}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{V}{\eta}\right)^3+0\left(\left|\frac{V}{\eta}\right|^4\right) \tag{29}$$

略去$0\left(\left|\frac{V}{\eta}\right|^4\right)$后将（29）式代入（28）式可得

$$W^2=-\frac{2}{3}\frac{\xi}{\eta^2}\left[V^3-\frac{3}{2}\eta V^2-\frac{3\eta^2}{\xi}B\right]=-\frac{3}{2}\frac{\xi}{\eta^2}P(V) \tag{30}$$

其中$B=A-\xi\eta\ln|\eta|>0$。

为了保证解为有界周期函数，故要求$P(V)=0$有三个实根。因此对于常数B需要加以一定的限制，由$P'(V)=0$可求出两个极点的值

$$P(\eta)=-\frac{1}{2}\eta^3-\frac{3}{\xi}\eta^2B$$

$$P(0)=-\frac{3}{\xi}\eta^2\times B<0$$

为保证$P(V)=0$有三个独立的实根，要求$P(\eta)>0$，即

$$B<-\frac{1}{6}\xi\eta \tag{31}$$

从而有

$$\xi\eta\ln|\eta|<A<-\frac{1}{6}\xi\eta \tag{32}$$

由此可以看出，采用Taylor展开的方法求波解时，解的范围缩小了，对于$\xi\eta<0$，$A>-\frac{1}{6}\xi\eta$时的波动解我们尚无法求出其解析解，但此时解是存在的。

对于$\xi<0$，$\eta>0$的情况，不妨设$V_1<0<V_2<\eta<V_3$。这时的解为

$$V(\theta)=V_1-(V_1-V_2)\,\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{-\frac{\xi}{6\eta^2}(V_3-V_1)}\times\theta\right) \tag{33}$$

对于$\xi>0$，$\eta<0$的情况，不妨设$V_3<\eta<V_1<0<V_2$。这时的解为

$$V(\theta)=V_1+(V_2-V_1)\,\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{\xi}{6\eta^2}(V_2-V_3)}\times\theta\right) \tag{34}$$

其中cn（ ）表示Jacobi椭园余弦函数。

六、结 束 语

本文应用常微分方程的稳定性理论和相图分析方法讨论了(4)～(5)式所描写的一类非线性正压Rossby波的存在性和稳定性。Rossby波的存在要求基本气流绝对涡度的经向梯度与波速、基本气流之差为反号，且V＝0时的初始涡度不为零。当满足上述条件时非线性扰动是稳定的；反之扰动变为不稳定的。若$\beta=\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}$在所讨论的范围内存在，则不稳定判据与线性正压不稳定判据一致。另外，在线性正压稳定时，由于非线性作用也可造成扰动的不稳定。

但上述结论是很初步的，在讨论中我们略去了由于经向扰动所产生的非线性作用，对于该项的影响以及地形和非绝热加热的作用，我们将在另文中详细讨论。

本文曾得到刘式适，黄思训两位老师的热情帮助，特此致谢。

参 考 文 献

〔1〕Redekopp, L.G., On the theory of solitary Rossby waves, *J.F.M.*, Vol. 82, P. 725—745, 1977.

〔2〕Maslowe, S.A. and Redekopp, L.G., Geophy. and Astro. Fluid Dynamics, 1979.

〔3〕Loug, R.R., Solitary Wave in the Westerlies, *J. Atmos. Sci.*, Vol.21, P.197—200, 1964.

〔4〕Benney, D.J., *J. Math. and Phys.*, Vol. 45, P.52—63, 1966.

〔5〕刘式达、刘式适，大气非线性波动方程的解，气象学报，Vol. 40, P. 279—287, 1982.

〔6〕刘式适、刘式达，地球流体中的非线性波动，中国科学（B辑），Vol. 17, P. 279—287, 1983.

〔7〕黄思训、吕荣庆，非线性正压 Rossby 波，力学学报，Vol. 17, P. 212, 1985。

〔8〕张锦炎，常微分方程几何理论与分支问题，北京大学出版社，1981。

NONLINEAR BAROTROPIC ROSSBY WAVE AND ITS STABILITY

Huang Jianping
(*Lanzhou Institute of Plateau Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, beginning with the nonlinear barotropic vorticity equation describing Rossby wave and using the geometric theory and the stability theory of the ordinary differential equations, the existence and stability of Rossby wave are discussed. It is shown that the existence and stability of Rossby wave demand $\left(\beta-\frac{d^2\overline{u}}{dy^2}\right)\Big/(k^2+l^2)(c-\overline{u})<0$, and the nonlinear barotropic when the V is zero, the initial vorticity is not zero.

Furthermore, we obtain two analytic solutions for the Rossby wave.