大气运动方程组的算子特性及其应用

黄建平 丑纪范
（兰州大学大气科学系）

提 要

本文利用文献[1]提出的描述大气运动的算子理论，研究了绝热无摩擦线性化方程组的算子特性，并利用这些特性讨论了：1)初值问题解的唯一性问题；2)大气特征波动的普遍性质；3)检验了几种经典近似的合理性，在保证算子性质不变的前提下对非弹性近似和Bousinessq近似作了重新定义。最后指出采用算子理论描述大气运动的基本特征具有广泛的应用前景。

一、引 言

进行大气动力学的理论分析和做数值天气预报都不可避免的要对原始方程组进行这样那样的简化。在以往的研究中，一直没有明确地讨论过各种简化对基本方程组的根本物理属性有何影响以及在普遍意义下的简化原则。最近，丑纪范[1]提出了描述大气运动的算子理论，指出了算子方程的固有特征以及简化方程组应该遵循的普遍准则。本文试图应用这一理论以简化的方程组为例研究某些经典近似的合理性。

二、基本方程组及算子特性

为了简单起见，采用不考虑基本气流，并作了适当变换以后的绝热无摩擦的线性方程组[2]

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z}-\Gamma p+gq \tag{3}$$

$$\frac{g^2}{N^2}\frac{\partial q}{\partial t}+gw=0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}-\Gamma w=0 \tag{5}$$

其中：$N=\left(\frac{g}{\bar\theta}\frac{\partial\bar\theta}{\partial z}\right)^{\frac{1}{2}}$为Brunt—Vāisālā 频率，$C_s^2$是声速。$q=(\bar\rho\cdot\bar\rho_s)^{\frac{1}{2}}\theta'/\bar\theta$，这里$\bar\rho_s$是$\bar\rho(s)$在地球表面的平均值，它是常数与Z无关。其中"—"表示仅依赖于Z的基本场。另外，Γ为静力稳定参数，它可写为

$$\Gamma=\frac{1}{2}\delta_z-\frac{N^2}{g}=\frac{g}{c_s^2}-\frac{1}{2}\delta_z$$

$$\delta_z=-\frac{1}{\bar\rho}\frac{d\bar\rho}{dz}=\frac{1}{\bar\theta}\frac{\partial\bar\theta}{\partial z}-\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\bar p}\frac{\partial\bar P}{\partial z}$$

边界条件：为简单起见，选取一个矩形区域，东西取为周期边界条件，南北为固定边界条件。垂直边界条件　$Z=0$，$w=0$；及$Z\to\infty$，$w=0$。

初始条件：

$$\lim_{t\to t_0}(u,\ v,\ w,\ q,\ p)=(u_0,\ v_0,\ w_0,\ q_0,\ p_0)$$

引进向量函数$\varphi(u,\ v,\ w,\ q,\ p)^T$（T为转置），和矩阵算子。可将微分方程组(1)—(5)写成一个算子方程，如下：

$$\mathbf{B}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathbf{N}\varphi=0 \tag{6}$$

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{B}\varphi=\mathbf{B}\varphi_{\circ} \tag{7}$$

其中算子B，N的形式为

$$\mathbf{B}=\left\|\begin{matrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\frac{g^2}{N^2}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{c_s^2}\end{matrix}\right\| \tag{8}$$

$$\mathbf{N}=\left\|\begin{matrix}0&-f&0&0&\frac{\partial}{\partial x}\\f&0&0&0&\frac{\partial}{\partial y}\\0&0&0&-g&\frac{\partial}{\partial z}+\Gamma\\0&0&g&0&0\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}-\Gamma&0&0\end{matrix}\right\| \tag{9}$$

算子方程(6)—(7)是文献[1]提出的普遍意义下算子方程的一个特例。类似地我们定义内积(φ_1, φ_2)如下：

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_\Omega (u_1 \cdot u_2 + v_1 \cdot v_2 + w_1 \cdot w_2 + q_1 \cdot q_2 + p_1 \cdot p_2) d\Omega \tag{10}$$

其中Ω为积分区域，$\varphi_1 = (u_1, v_1, w_1, q_1, p_1)^T$，$\varphi_2 = (u_2, v_2, w_2, q_2, p_2)^T$。

容易证明，B为正定自伴算子，N为反伴算子*。于是我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, B\varphi) = \frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega E d\Omega = 0 \tag{11}$$

这里E是总能量密度，由下式定义

$$E = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{p^2}{c_s^2} + \frac{g^2 q^2}{N^2} \right) \tag{12}$$

由此可见，$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi, B\varphi)$反映了总能量的守恒性质，B的自共轭和正定性是同它被用来表示能量相联系的。

而$(\varphi, N\varphi) = 0$表示算子N对总能量的变化没有贡献，它的反伴性乃是地转偏向力，气压梯度力等不改变总能量这一重要物理本质的表征。

下面我们来证明算子方程的另外一个性质。利用算子的性质我们有：

$$(\varphi_1, B\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}) = (\varphi_2, N\varphi_1) \tag{13}$$

$$(\varphi_2, B\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}) = -(\varphi_2, N\varphi_1) \tag{14}$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_1, B\varphi_2) = 0 \tag{15}$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 + \frac{p_1 p_2}{c_s^2} + \frac{g^2}{N^2} q_1 q_2\right) d\Omega = 0 \tag{16}$$

利用(16)式，我们先来讨论初值问题解的唯一性。

三、初值问题解的唯一性

记$\hat{\varphi} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{q}, \hat{p})^T$为初值问题的两解之差的向量函数。因方程组是线性的，故$\hat{\varphi}$也是方程的一个解。它满足边界条件和零初值条件。相应的量$\hat{E}$满足(16)式和初值条件$\hat{E}(0) = 0$。

因此对任何时刻t都有

*：这里N算子的反伴性质似乎与内积的定义和边界条件有关，但对大气运动方程组来说这一性质在Hilbert空间中是普遍成立的，[1]中曾在更广泛的意义下给出过证明，本文讨论的只是一个特例。

$$\hat{E}=\int_{\Omega}\frac{1}{2}\left[\hat{u}^2+\hat{v}^2+\hat{w}^2+\frac{\hat{p}^2}{c_s^2}+\frac{g^2\hat{q}^2}{N^2}\right]d\Omega=0 \tag{17}$$

因为被积函数的各项都是正的，所以只能有

$$\hat{u}=\hat{v}=\hat{w}=\hat{p}=\hat{q}=0$$

从而证明了初值问题的解是唯一的。

需要指出的是，上述方法是普遍适用的，这里仅以线性方程组说明利用算子特性讨论初值问题解的适定性问题要比经典的方法[3]更加简明直观。

四、大气特征波动的普遍性质

考虑到B算子的正定性，我们重新定义内积为：

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_{\Omega}\left(u_1u_2^*+v_1v_2^*+w_1w_2^*+\frac{p_1p_2^*}{c_s^2}+\frac{g^2}{N^2}q_1q_2^*\right)d\Omega \tag{18}$$

其中‘*’表示复共轭。

类似于(16)式的证明，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\left(u_1u_2^*+v_1v_2^*+w_1w_2^*+\frac{p_1p_2^*}{c_s^2}+\frac{g^2}{N^2}q_1q_2^*\right)d\Omega=0 \tag{19}$$

利用此结果，下面我们来证明具有时间因子$e^{-i\omega t}$的运动模型的频率ω是实数以及不同频率的特征型运动是正交的两个普遍性质。

(1)频率ω是实数

设$\varphi_1=e^{-i\omega^* t}(U,V,W,Q,P)$

$\varphi_2^*=e^{-i\omega^* t}(U,V,W,Q,P)$

由(18)式内积的定义和(19)式的结果，我们有

$$(\omega^*-\omega)\int_{\Omega}\left(U^2+V^2+W^2+\frac{P^2}{c_s^2}+\frac{g^2}{N^2}Q^2\right)d\Omega=0 \tag{20}$$

因为被积函数是正的，所以由(20)式可知$\omega=\omega^*$。从而证明了，频率ω是实数。

(2)不同频率的特征型运动是正交的

设$\varphi_1=(U_1,V_1,W_1,Q_1,P_1)e^{-i\omega_1 t}$

$\varphi_2=(U_2,V_2,W_2,Q_2,P_2)e^{-i\omega_2 t}$

且$\omega_1\neq\omega_2$，则由方程(19)可得

$$(\omega_2-\omega_1)\int_{\Omega}\left(U_1U_2+V_1V_2+W_1W_2+\frac{P_1P_2}{c_s^2}+\frac{g^2}{N^2}Q_1Q_2\right)d\Omega=0 \tag{21}$$

因为$\omega_1\neq\omega_2$，故(21)式中的积分等于零。这就是说，在内积(18)的意义下，两同型但频率不同的运动是正交的。

上述结论，就是我们采用叠加原理讨论大气特征波动的数学基础。利用B算子的正定性我们还可证明更复杂的情形。

五、几个经典近似数学背景的注记

文献[1]指出，大气运动在极其普遍的意义下可写成算子方程的形式，即

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(N+L)\varphi=\zeta \tag{22}$$

这里B，L为正定自伴算子，N为反伴算子，经过种种简化后的方程组，也应能设法写成形如(22)式的算子方程，并且要保证算子性质不变，如果在简化后算子的性质被破坏，说明简化方式歪曲了原来方程组的物理属性，本文讨论的方程组是文献[1]的一个特例。因此，当对上述方程组(1)—(5)作近似后，仍要保证能写成形如(6)式的算子方程，并保证其算子的性质不变。下面我们利用这个准则来验证一下几个经典近似的合理性，并重新给出统一的定义。这是因为许多文献和动力气象教课书中对非弹性近似和Boussinesq近似的定义并不完全一致，因此有必要加以澄清。下面以文献[5]的定义为例进行讨论。

为了将小扰动时的未简化与简化情况下的方程式统一起来，按文献[5]的作法，引入示踪参量λ_1，λ_2和λ_3，它们的定义为：

$$\begin{cases}\lambda_2=\lambda_3=1,\ \lambda_1=0 & \text{静力近似}\\ \lambda_1=\lambda_3=1,\ \lambda_2=0 & \text{非弹性近似}\\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=0 & \text{Boussinesq近似}\end{cases} \tag{23}$$

于是方程组可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{24}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{25}$$

$$\lambda_1\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{2}\delta_z p-\lambda_3\frac{g}{c_s^2}p+gq \tag{26}$$

$$\frac{g^2}{N^2}\frac{\partial q}{\partial t}+gw=0 \tag{27}$$

$$\frac{\lambda_2\lambda_3}{c_s^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{2}\delta_z w+\lambda_2\frac{N^2}{g^2}w=0 \tag{28}$$

这时B和N算子可重新写为

$$B=\begin{Vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&\lambda_1&0&0\\0&0&0&\frac{g^2}{N^2}&0\\0&0&0&0&\frac{\lambda_2\lambda_3}{c_s^2}\end{Vmatrix} \tag{29}$$

$$N=\begin{Vmatrix} 0 & -f & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ f & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -g & \frac{\partial}{\partial z}\Gamma_2 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\Gamma_2 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{30}$$

其中 $\Gamma_1=-\frac{1}{2}\delta_z+\lambda_3\frac{g}{c_s^2}$，　$\Gamma_2=-\frac{1}{2}\delta_z+\lambda_2\frac{N^2}{g}$

不难看出，对算子B 来说无论采用何种近似都保持自巳的性质不变，但N算子则不然。根据(23)的定义我们有

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\lambda_3=1\qquad \Gamma_1=-\Gamma_2=\Gamma$$

$$\lambda_2=0,\quad \lambda_1=\lambda_3=1\qquad \Gamma_1=\Gamma,\qquad \Gamma_2=-\Gamma+\frac{N^2}{g}$$

$$\lambda_3=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=1\qquad \Gamma_1=\Gamma-\frac{g}{c_s^2},\qquad \Gamma_2=-\Gamma$$

由此可以看出，当$\lambda_2=0$或$\lambda_3=0$时，算子N不再具有反伴特性，尽管$\frac{N^2}{g}$或$\frac{g}{c_s^2}$是小量项有时可以忽略不计，但在严格意义上讲文献〔5〕中的定义是不恰当的。

为了保证简化过程中保持N的性质不变，我们将(24)—(28)重新写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{\partial P}{\partial X} \tag{31}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-\frac{\partial P}{\partial y} \tag{32}$$

$$\lambda_1\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\lambda_3\Gamma P+gq \tag{33}$$

$$\frac{g^2}{N^2}\frac{\partial g}{\partial t}+gw=0 \tag{34}$$

$$\frac{\lambda_2\lambda_3}{c_s^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}-\lambda_3\Gamma w=0 \tag{35}$$

其中示踪系数λ_1，λ_2,λ_3取(23)式的定义，于是无论λ_1，λ_2,λ_3取值如何，我们总有 $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi,\ B\varphi)=\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+\lambda_1w^2+\frac{\lambda_2\lambda_3}{c_s^2}p^2+\frac{g^2}{N^2}q^2\right)d\Omega=0$ 也就是说(31)—(35)所定义的三种近似保证了方程组的简化过程中物理属性没有被破坏。

六、结 语

综上所述，我们利用简化方程组的算子特性研究了初值问题解的唯一性问题和大气特征波动的普遍性质。虽然方程过于简单，但显示出用算子方程描写大气运动特征的优越性，其方法是普遍适用的，与经典的方法相比更加简明直观，而且更为严格。另外，我们用文献〔1〕中的准则验证了：1）静力近似；2）非弹性近似；3）Bousinessq近似，指出了某些文献中非弹性近似和Bousrnessq近似不合理之处，并将这两个近似作了适当的修正。对方程组无论作何种假定和简化都必需保证其算子的特性不变，这是一个普适的准则。

最后可以预见采用算子理论描写大气运动必然会得到广泛的应用并具有广阔前景。

参 考 文 献

〔1〕丑纪范，初始场作用的衰减与算子的特性，气象学报，vol.41，P.385—392，1983。
〔2〕郭晓岚，大气动力学，江苏科学技术出版社，P.22—32，1981。
〔3〕曾庆存，数值预报的数学物理基础，科学出版社，P.498—506，1979。
〔4〕S.Friedlander，地球物理流体动力学数学理论导论，科学出版社，1985。
〔5〕张可苏，大气动力学模式的比较研究，中国科学，1980年第3期，P.277—283。

THE CHARACTERISTIC OF THE OPERATORS OF THE ATMOSPHERIC MOTION EQUATIONS AND ITS APPLICATION

Huang Jianping Chou Jifan

(Department of Atmospheric Sciences, Lanzhou University)

Abstract

The purpose of this paper is to study the properties of the operators of adiabatic frictionless linearized equations by the theory of the operators which was pointed out by Chou Jifan[1] andto discuss:

(1) the uniqueness of solution on initial value problem.
(2) the general properties of atmosphere characteristic wave.
(3) the reasonableness of several classical approximations and the new definitions of non-elastic and Boussinesq approximations bsaed on the premise of the fixed properties of the operators.

Finally it was pointed out that fundamental features of atmospherc motion described by the operator theory has extensive prospects.